

①

Si: las siguientes operaciones:

$$(x; y) + (x', y') = (x+x', y+y')$$

$$\lambda(x; y) = (\lambda x, y)$$

Veremos primero neutro $e = (e_1; e_2)$

$$(x; y) + (e_1, e_2) = (x+e_1, y+e_2)$$

$$\text{Si } (x+e_1; y+e_2) = (x; y)$$

$$\rightarrow e = (e_1; e_2) = (0; 0)$$

Veamos si cumple OPUESTO ADITIVO.

$$(x; y) + (-1)(x; y) = (0; 0)$$

$$(x; y) + (-x; y)$$

$$(x-x; y+y)$$

$$(0; 2y) \neq (0; 0)$$

Por lo tanto con estas operaciones no es posible definir

\mathbb{R}^2 como un espacio vectorial.

② Con las operaciones siguientes

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\lambda (x, y) = (\lambda x, 0)$$

¿Es \mathbb{R}^2 un e.v?

Primero veamos neutro aditivo.

$$(x, y) + (e_1, e_2) = (x, y)$$

$$(x + e_1, y + e_2) = (x, y)$$

$$\rightarrow e = (e_1, e_2) = (0, 0)$$

Ahora OPUESTO ADITIVO.

$$(x, y) + (-1)(x, y) = (e_1, e_2)$$

$$(x, y) + (-x, 0) = (0, 0)$$

$$(0, y) \neq (0, 0)$$

Por lo tanto no cumple este axioma y las operaciones

no definen a \mathbb{R}^2 como un espacio vectorial

Además que no cumple

$$1 \cdot (x, y) \stackrel{?}{=} (x, y)$$

$$(x, 0) \neq (x, y)$$

③ Sea $p \in P_n$ ($a_i \in \mathbb{R}$)

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\text{Si } q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Veremos

i) $p(x) + q(x)$ también $\in P_n$ (cerradura)

ii) Si $p, q, r \in P_n \rightarrow (p+q)+r = p+(q+r)$
(asociatividad de la suma)

iii) $p(x) + 0 = p(x)$

$$\text{Si } 0 = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x + 0 \rightarrow 0 \in P_n$$

iv) $-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots - a_1 x - a_0$

$$p(x) + (-p(x)) = 0$$

v) $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$

vi) $\alpha \cdot p(x) \in P_n$ ya que $\alpha p(x)$ es de
un grado igual
a $p(x)$

vii) $\alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$

viii) $(\alpha+\beta)p = \alpha p + \beta p$

ix) $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$

x) $1 \cdot p = p$

4) Sabiendo que:

M_{nn} conjunto de matrices de
componentes reales

es un espacio vectorial

Demostremos que $W = \{ A / A = A^T \} \subset M_{nn}$

es un subespacio vectorial

y con esto demostrar que
es un espacio vectorial

$$1) A + B = A^T + B^T = (A + B)^T$$

$$\rightarrow A + B \in W$$

$$2) \alpha \cdot A = \alpha \cdot A^T = (\alpha \cdot A)^T$$

$$\rightarrow \alpha A \in W$$

$\therefore W$ es un subespacio vectorial de M_{nn}

$\rightarrow W$ es un
espacio vectorial

⑤ Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$$(x, y) + (x', y') = (x + x' - 1, y + y')$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$$

¿Es V un espacio vectorial?

Si $(x, y) + (e_1, e_2) = (x, y)$

$$(x + e_1 - 1, y + e_2) = (x, y)$$

$$e = (e_1, e_2) = (1, 0)$$

Si $(x, y) + (-1)(x, y) = (1, 0)$

$$(x, y) + (-x, 0)$$

$$(x - x - 1, y + 0)$$

$$(-1, y) \neq (1, 0)$$

Por lo tanto no cumple
con el axioma

y V no es un
espacio vectorial

⑥ Sea $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

¶ $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Veamos NEUTRO ADITIVO

$$(x, y, z) + (e_1, e_2, e_3) = (x, y, z)$$

$$(x + e_1, y + e_2, z + e_3) = (x, y, z)$$

$$e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 0$$

$$e = (0, 0, 0)$$

Veamos INVERSO ADITIVO.

$$(x, y, z) + (-1)(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$(x, y, z) + (-x, -y, -z)$$

$$(x - x, y - y, z - z)$$

$$(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Solo se cumple para $x = y$

Para los demas valores $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

no se cumple

→ \forall no es un espacio vectorial

7) Determine cuales de los siguientes conjuntos W son subespacios vectoriales del espacio vectorial V :

I) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -a \\ a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$

Tenemos que los elementos de W son de la forma:

$$\begin{bmatrix} a \\ -a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sea $x, y \in W$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

^

$$y = \begin{bmatrix} y \\ -y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \cdot x + y = \alpha \cdot x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (\alpha \cdot x + y) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$$

∴ W es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

II) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{ (t, 3t, 5t) \in \mathbb{R}^3 \}$

Tenemos que los elementos de W son de la forma:

$$\begin{bmatrix} t \\ 3t \\ 5t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sea $x, y \in W$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ 3x \\ 5x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

^

$$y = \begin{bmatrix} y \\ 3y \\ 5y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \cdot x + y = \alpha \cdot x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = (\alpha \cdot x + y) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in W$$

∴ W es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

$$\text{III)} \quad V = M_3, \quad W = \{A \in M_3 \mid \det(A) = 0\}$$

Sea $A, B \in W$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \quad \det(B) = 0$$

$$\alpha \cdot A + B = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(\alpha \cdot A + B) = \alpha a_{11}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - \alpha a_{12}(b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}) + \alpha a_{13}(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})$$

$$\rightarrow \det(\alpha \cdot A + B) \neq 0$$

∴ W no es un subespacio vectorial de M_3

8) Diga si los siguientes conjuntos son L.I o L.D y cuales de ellos son una base.

a. $\{x; 2x-x^2; 6x-2x^2\}$ en P_2

$$a(x) + b(2x-x^2) + c(6x-2x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$ax + 2bx - bx^2 + 6cx - 2cx^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$(a+2b+6c)x + (-b-2c)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} a+2b+6c=0 \\ -b-2c=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c=t \\ b=-2t \\ a=-2t \end{array}, t \in \mathbb{R} \quad \exists \text{ infinitas soluciones}$$

$$\text{Sea } t=1 \rightarrow c=1, b=-2 \text{ y } a=-2 \rightarrow 1(x) - 2(2x-x^2) - 2(6x-2x^2) = 0$$

∴ El conjunto es L.D. por lo tanto no es una base en P_2

b. $\{1-2x; 3x+x^2-x^3; 1+x^2+2x^3; 3+2x+3x^3\}$ en P_3

$$a(1-2x) + b(3x+x^2-x^3) + c(1+x^2+2x^3) + d(3+2x+3x^3) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$a - 2ax + 3bx + bx^2 - bx^3 + c + cx^2 + 2cx^3 + 3d + 2dx + 3dx^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$(a+c+3d) + (-2a+3b+2d)x + (b+c)x^2 + (-b+2c+3d)x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$\left. \begin{array}{l} a+c+3d=0 \\ -2a+3b+2d=0 \\ b+c=0 \\ -b+2c+3d=0 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 17/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Entonces tenemos que:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -3/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 17/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow a=0, b=0, c=0, d=0$$

∴ El conjunto es L.I. y como el # de elementos del conjunto es igual a $4 = \dim(P_3)$ entonces el conjunto es una base en P_3 .

9) Dados los vectores $a=(1,2,3)$; $b=(1,1,1)$; $c=(1,0,5)$; $d=(1,1,3)$

a) ¿Forman una base de \mathbb{R}^3 ?

Sea $S = \{(1,2,3); (1,1,1); (1,0,5); (1,1,3)\}$

$$m(1,2,3) + n(1,1,1) + p(1,0,5) + q(1,1,3) = 0$$

$$(m, 2m, 3m) + (n, n, n) + (p, 0, 5p) + (q, q, 3q) = 0$$

$$(m+n+p+q, 2m+n+q, 3m+n+5p+3q) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} m+n+p+q=0 \\ 2m+n+q=0 \\ 3m+n+5p+3q=0 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/3 & 5/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 \end{array} \right)$$

Entonces tenemos:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1/3 & 5/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} m \\ n \\ p \\ q \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} m=t \\ n=t \\ p=t \\ q=-3t \end{array} \right\} t \in \mathbb{R} \text{ Infinitas Soluciones}$$

Sea $t=1 \rightarrow m=1, n=1, p=1, q=-3$

$$\rightarrow (1,2,3) + (1,1,1) + (1,0,5) - 3(1,1,3) = 0$$

∴ El conjunto S es l.d. por lo tanto los vectores no forman una base de \mathbb{R}^3 .

b) Expresar el vector d como combinación lineal de a, b y c

$$(1, 1, 3) = x(1, 2, 3) + y(1, 1, 1) + z(1, 0, 5)$$

$$(1, 1, 3) = (x, 2x, 3x) + (y, y, y) + (z, 0, 5z)$$

$$(1, 1, 3) = (x+y+z, 2x+y, 3x+y+5z)$$

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y=1 \\ 3x+y+5z=3 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/5 & 5/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right)$$

Entonces tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1/5 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 1/3 \\ y = 1/3 \\ x = 1/3 \end{array} \right.$$

Finalmente tenemos que:

$$(1, 1, 3) = \frac{1}{3}(1, 2, 3) + \frac{1}{3}(1, 1, 1) + \frac{1}{3}(1, 0, 5)$$

∴ Si es posible expresar el vector d como combinación lineal de a, b y c .

- 10) Si u, v y w son L.D. ¿Podemos asegurar que
a) u es combinación lineal de v y w ?

Dado que u, v y w son L.D. entonces existen constantes no todas igual a 0 tales que:

$$C_1 \cdot u + C_2 \cdot v + C_3 \cdot w = 0$$

Sea $C_1 \neq 0$

$$\rightarrow u + \frac{C_2}{C_1} \cdot v + \frac{C_3}{C_1} \cdot w = 0$$

$$\rightarrow u = -\frac{C_2}{C_1} \cdot v - \frac{C_3}{C_1} \cdot w$$

o. Si es posible expresar u como una combinación lineal de v y w .

- b) Halle las coordenadas del vector $a = (4, 3, 7)$ respecto de la base $B = \{(2, 1, 0); (1, 0, -2); (0, 0, 3)\}$

$$(4, 3, 7) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(1, 0, -2) + \theta(0, 0, 3)$$

$$(4, 3, 7) = (2\alpha, \alpha, 0) + (\beta, 0, -2\beta) + (0, 0, 3\theta)$$

$$(4, 3, 7) = (2\alpha + \beta, \alpha, -2\beta + 3\theta)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha = 3 \\ -2\beta + 3\theta = 7 \end{array} \right\} \alpha = 3, \beta = -2, \theta = 1$$

$$\rightarrow (4, 3, 7) = (3)(2, 1, 0) + (-2)(1, 0, -2) + (1)(0, 0, 3)$$

o. las coordenadas de $(4, 3, 7)$ respecto de la base B son $3, -2, 1$

11) Dados los vectores $u = (2, -1, 0)$ y $v = (3, 2, 1)$

a) ¿Son linealmente independientes?

$$a(2, -1, 0) + b(3, 2, 1) = 0$$

$$(2a, -a, 0) + (3b, 2b, b) = 0$$

$$(2a+3b, -a+2b, b) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2a+3b=0 \\ -a+2b=0 \\ b=0 \end{array} \right\} b=0, a=0$$

Es los vectores u y v son linealmente independientes

b) ¿Pueden formar una base de \mathbb{R}^3 a partir de dichos vectores?

Tenemos que la base canónica en \mathbb{R}^3 es:

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \rightarrow \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

Concluimos que los vectores u y v no forman una base de \mathbb{R}^3 ya que la $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ es la cantidad de vectores que componen una base de \mathbb{R}^3 .

12..

a) Halla los valores de m para que los vectores $u = (0, 1, 1)$; $v = (-2, 0, 1)$ y $w = (m, m-1, 1)$ sean linealmente independientes

$$\alpha_1 (0, 1, 1) + \alpha_2 (-2, 0, 1) + \alpha_3 (m, m-1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & m \\ 1 & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} |A| &= m \cdot 2m + 2 + 2 \\ &= -m + 4 \\ |A| &= 4 - m \neq 0 \\ m &\neq 4 \end{aligned}$$

Si $m \neq 4$, u, v y w son linealmente independientes

b) Estudia si el vector $(2, 1, 0)$ depende linealmente de u, v y w para el caso $m = 3$

$$a(0, 1, 1) + b(-2, 0, 1) + c(3, 2, 1) = (2, 1, 0)$$

$$\left. \begin{aligned} 0a - 2b + 3c &= 2 \\ a - 0b + 2c &= 1 \\ a + b + c &= 0 \end{aligned} \right\} A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & | & 2 \\ 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow c = 0, b = 1, a = 1 \in \mathbb{R}$$

\therefore El vector $(2, 1, 0)$ depende linealmente de u, v, w para $m = 3$.

3.. En los siguientes casos determine si el subconjunto dado de $M_{2 \times 2}$ es un subespacio vectorial de $M_{2 \times 2}$

a) El conjunto de matrices de la forma: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$

u y $v \in W$.

$$\alpha u + v = \alpha \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & -u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & -v_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha u_1 & 0 \\ 0 & -\alpha u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & -v_1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha u + v = \begin{bmatrix} \alpha u_1 + v_1 & 0 \\ 0 & -(\alpha u_1 + v_1) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha u + v \in W$$

$\therefore W$ es un subespacio de $M_{2 \times 2}$.

b) El conjunto de todas las matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tales que $a+d=b+c$

$$\begin{aligned} u, v &\in U \\ \alpha u + v &= \alpha \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha u_{11} + v_{11} & \alpha u_{12} + v_{12} \\ \alpha u_{21} + v_{21} & \alpha u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\alpha u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \text{ tal que } u_{11} + u_{22} = u_{21} + u_{12}$$

Condiciones de u y v :

$$i) u_{11} + u_{22} = u_{21} + u_{12}$$

$$\alpha u_{11} + \alpha u_{22} = \alpha u_{21} + \alpha u_{12} \quad (+)$$

$$ii) v_{11} + v_{22} = v_{21} + v_{12}$$

$$(\alpha u_{11} + v_{11}) + (\alpha u_{22} + v_{22}) = (\alpha u_{21} + v_{21}) + (\alpha u_{12} + v_{12})$$

$$u_{11} + u_{22} = u_{21} + u_{12}$$

$\therefore U$ es un subespacio vectorial de $M_{2 \times 2}$.

c) El conjunto de matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tales que $a+b+c+d=0$

Sean:

$$\begin{aligned} u &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \in W \rightarrow u_{11} + u_{22} + u_{21} + u_{12} = 0 \\ v &= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \in W \rightarrow v_{11} + v_{22} + v_{21} + v_{12} = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} u &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \in W \rightarrow u_{11} + u_{22} + u_{21} + u_{12} = 0 \\ v &= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \in W \rightarrow v_{11} + v_{22} + v_{21} + v_{12} = 0 \right\} u_{11} + u_{22} + u_{21} + u_{12} = 0$$

$$\rightarrow \alpha u + v = \alpha \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha u_{11} & \alpha u_{12} \\ \alpha u_{21} & \alpha u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha u_{11} + v_{11} & \alpha u_{12} + v_{12} \\ \alpha u_{21} + v_{21} & \alpha u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \text{ tales que } w_{11} + w_{22} + w_{21} + w_{12} = 0$$

$$\rightarrow \alpha u + v \in W$$

$\therefore W$ es un subespacio vectorial de $M_{2 \times 2}$

14.- Sea V el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n .
Si W es un subconjunto de V formado por las matrices que son:

i) Triangulares Inferiores

$u, v \in W$.

$$\begin{aligned} \rightarrow \alpha u + v &= \alpha \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & \dots & 0 \\ v_{21} & v_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha u_{21} & \alpha u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha u_{n1} & \vdots & \dots & \alpha u_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & \dots & 0 \\ v_{21} & v_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha u_{11} + v_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha u_{21} + v_{21} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha u_{n1} + v_{n1} & \dots & \dots & \alpha u_{nn} + v_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\rightarrow \alpha u + v \in W$

\therefore Las matrices triangulares inferiores son un subconjunto vectorial de V .

ii) Escalares:

$x, y \in W$.

$$\begin{aligned} \rightarrow \alpha x + y &= \alpha \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\alpha x + y = \begin{bmatrix} \alpha x + y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha x + y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha x + y \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha x + y \in W$$

\therefore Las matrices escalares son subconjunto vectorial de V .

(ii) Antisimétricas:

$$m \text{ y } n \in W$$

$$\rightarrow \alpha m + n = \alpha \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ -m_{12} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -m_{1n} & & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n_{12} & \dots & n_{1n} \\ -n_{12} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -n_{1n} & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \alpha m_{12} & \dots & \alpha m_{1n} \\ -\alpha m_{12} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\alpha m_{1n} & & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n_{12} & \dots & n_{1n} \\ -n_{12} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -n_{1n} & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha m + n = \begin{bmatrix} 0 & \alpha m_{12} + n_{12} & \dots & \alpha m_{1n} + n_{1n} \\ -(\alpha m_{12} + n_{12}) & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(\alpha m_{1n} + n_{1n}) & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha m + n \in W$$

\therefore Las matrices antisimétricas son subconjunto vectorial de V .

En conclusión, W es un subespacio vectorial de V .

15.- Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de P_3 .

a) Todos los polinomios: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ para los que: $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

Sean $c, b \in W \rightarrow c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$ y $d_0 + d_1 + d_2 + d_3 = 0$

$$\begin{aligned} \rightarrow \alpha c + b &= \alpha(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3) + d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 \\ &= \alpha c_0 + \alpha c_1x + \alpha c_2x^2 + \alpha c_3x^3 + d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 \end{aligned}$$

$$= (\alpha c_0 + d_0) + (\alpha c_1 + d_1)x + (\alpha c_2 + d_2)x^2 + (\alpha c_3 + d_3)x^3$$

$$\alpha c + b = m_0 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3, \quad m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = 0$$

$$\rightarrow \alpha c + b \in W$$

$\therefore W$ es un subespacio vectorial de P_3 .

b) Los polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ para los que a_0, a_1, a_2, a_3 son reales.

Sean $m, n \in W \rightarrow m_0, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$ y $n_0, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \rightarrow \alpha m + n &= \alpha(m_0 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3) + n_0 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 \\ &= \alpha m_0 + \alpha m_1x + \alpha m_2x^2 + \alpha m_3x^3 + n_0 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 \end{aligned}$$

$$\alpha m + n = (\alpha m_0 + n_0) + (\alpha m_1 + n_1)x + (\alpha m_2 + n_2)x^2 + (\alpha m_3 + n_3)x^3$$

$$\rightarrow \alpha m + n \in W$$

$\therefore W$ es un subespacio vectorial de P_3 .

c) Los polinomios : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ para los que a_1, a_2, a_3, a_0 son racionales

Sean $p, q \in U \rightarrow p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Q}$ y $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}\rightarrow \alpha p + q &= \alpha(p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3) + q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 \\ &= (\alpha p_0 + q_0) + (\alpha p_1 + q_1)x + (\alpha p_2 + q_2)x^2 + (\alpha p_3 + q_3)x^3 \\ &= n_0 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3\end{aligned}$$

$$\text{Si } \alpha = \sqrt{2} \rightarrow n_0, n_1, n_2, n_3 \notin \mathbb{Q}$$

$\therefore U$ no es un subespacio vectorial de P_3

d) Todos los polinomios : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ para los que : $a_0 + a_1 = a_2 + a_3$

$$g, h \in W : g_0 + g_1 = g_2 + g_3 ; h_0 + h_1 = h_2 + h_3$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \alpha g + h &= \alpha(g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3) + h_0 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 \\ &= \alpha g_0 + \alpha g_1x + \alpha g_2x^2 + \alpha g_3x^3 + h_0 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 \\ &= (\alpha g_0 + h_0) + (\alpha g_1 + h_1)x + (\alpha g_2 + h_2)x^2 + (\alpha g_3 + h_3)x^3\end{aligned}$$

$$\alpha g + h = k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 ; k_0 + k_1 = k_2 + k_3$$

$$\rightarrow \alpha g + h \in W$$

$\therefore W$ es un subespacio vectorial de P_3

16.- Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma: $\{(x, y, z, u) / 3x + 5y = z - 4u\}$
 ¿es W un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 ?

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 3x + 5y + 4u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 3x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 5y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4u \\ u \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sean m y $n \in W$

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = m_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + m_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix} = n_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + n_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + n_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \alpha m + n &= \alpha \left[m_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + m_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right] + n_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + n_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + n_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha m_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha m_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + n_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + n_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + n_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (\alpha m_1 + n_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + (\alpha m_2 + n_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + (\alpha m_4 + n_4) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \alpha m + n \in W$$

$\therefore W$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 .